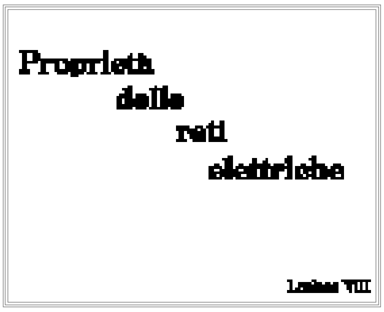
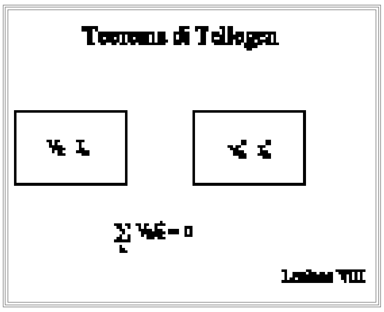
Capitolo III

Il teorema di Tellegen



Continuando l'esame generale di una rete dal punto di vista del suo grafo, vogliamo illustrare ora una notevole proprietà caratteristica delle reti di bipoli: la proprietà descritta dal teorema che va sotto il nome di *Teorema di Tellegen*. Consideriamo due reti che abbiano lo stesso grafo, cioè due reti in cui bipoli diversi sono collegati alla stessa maniera tra di loro. Consideriamo per la prima rete un sistema di tensioni V_k sui rami che soddisfi la LKT e per la seconda rete un sistema di correnti I^*_k che soddisfi la LKC. Con V_k intendiamo la tensione positiva nel nodo in cui entra la corrente I^*_k positiva - convenzione dell'utilizzatore per ogni ramo della rete! Per ogni ramo del grafo consideriamo il prodotto $V_k\ I^*_k$ e sommiamo tali prodotti per tutti i rami della rete:

$$\sum_k V_k I_k^* \qquad \text{(III.1)}$$



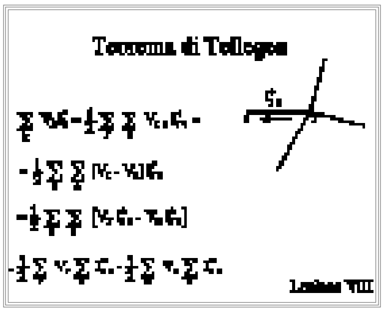
Il teorema di Tellegen afferma che tale sommatoria è identicamente nulla.

C'è qualche difficoltà ad esprimere, in generale, questa sommatoria in termini dei nodi r ed s perché non sappiamo a priori quali rami, tra due nodi (r,s), effettiva-

mente sono presenti nella rete; in un grafo, infatti, non tutti i nodi sono direttamente collegati tra loro. Possiamo, però, facilmente superare l'ostacolo aggiungendo al grafo i rami di collegamento che mancano tra i nodi, assumendo però che nelle due reti particolari considerate tali rami aggiunti siano in realtà dei "bipoli a vuoto". È chiaro che una tale modifica non cambia in nulla la rete, né modifica la sommatoria di cui sopra, in quanto per tali rami sarà $I^*_{rs}=0$. A questo punto la sommatoria può essere estesa a tutti i valori possibili di r e di s, e si ottiene:

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2}\sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* \qquad \text{(III.2)}$$

Il fattore un mezzo è necessario, altrimenti ogni ramo è preso due volte in considerazione; per esempio il ramo tra i nodi 1 e 2 sarà incluso per r=1 ed s=2 nonché per s=1 ed r=2!



Se le V_{rs} soddisfano la LKT sarà possibile metterle sotto la forma di differenza di potenziale $V_{rs} = V_r - V_s$ ottenendo:

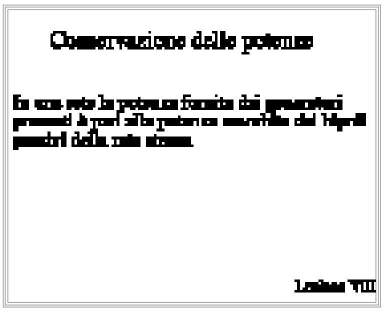
$$\sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \sum_{r,s} V_r I_{rs}^* - \sum_{r,s} V_s I_{rs}^* \qquad \text{(III.3)}$$

D'altra parte nella prima sommatoria V_r può essere portato fuori della sommatoria su s (V_r è per definizione fisso quando s *corre*!) mentre nella seconda sommatoria si può fare una cosa analoga per V_s se prima si scambiano le sommatorie su r e su s. Si ha, in conclusione:

$$\sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = \sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* - \sum_s V_s \sum_r I_{rs}^* \qquad \text{(III.4)}$$

In entrambe le sommatorie compaiono termini del tipo $\sum_s I^*_{rs}$ per un fissato r o $\sum_r I^*_{rs}$ per un fissato s. Tali termini, per un fissato nodo, esprimono la somma delle correnti uscenti dal nodo o delle correnti entranti nel nodo. Si osservi che quanto affermato è vero solo se si è avuto la cura di usare sempre la stessa convenzione su ogni bipolo: convenzione dell'utilizzatore, come nel nostro caso, o convenzione del generatore, indifferentemente. Le sommatorie del tipo $\sum_s I^*_{rs}$ sono, dunque, nulle in base alla LKC. Se ne deduce:

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2}\sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

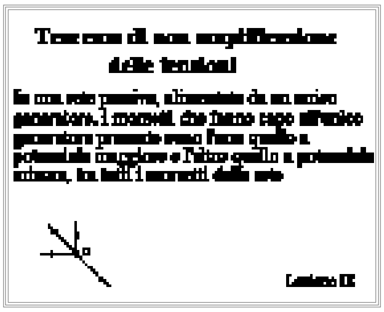


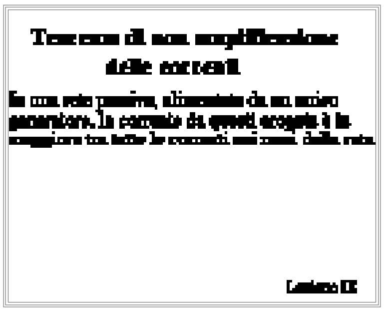
È importante sottolineare che non si sono dovute fare speciali ipotesi sulla natura dei bipoli o del grafo. La proprietà descritta dalla (III.5) è molto generale e discende soltanto dal fatto che sono soddisfatte la LKT e la LKC per le due reti. *La proprietà è quindi valida anche se sono presenti bipoli non lineari.* Naturalmente essa è ancora valida per il caso particolare in cui le due reti coincidono: in tal caso i prodotti $V_k I_k$ sono le potenze assorbite dai singoli bipoli ed il Teorema di Tellegen si riduce all'affermazione che in una rete la somma di tutte le potenze assorbite dai rami della rete è nulla. Si badi bene, *assorbite*; e ciò in base alle scelte che abbiamo inizialmente fatte sul verso di I_k ed V_k. Se in qualche ramo sono presenti generatori, la loro potenza assorbita risulterà negativa e quindi si può anche dire che il Teorema di Tellegen afferma che *in una rete la potenza fornita dai generatori presenti è pari alla potenza assorbita dai bipoli passivi della rete stessa.* Con buona pace, dunque, del principio di conservazione dell'energia, che altrimenti sarebbe violato!

Ma nella forma (III.5) il teorema di Tellegen stabilisce qualcosa in più. In questa forma esso prende anche il nome di *teorema delle potenze virtuali*, e ci sarà molto utile in regime sinusoidale per introdurre il concetto di *potenza reattiva*.

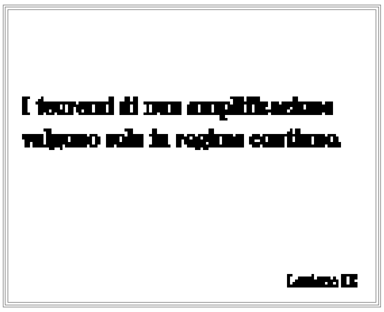
Le proprietà di non-amplificazione

Un’altra proprietà delle reti di bipoli che discende dal mero fatto che per tali reti valgono la LKT e la LKC, è il così detto *principio di non amplificazione delle tensioni* : *se in una rete di bipoli esiste un solo lato attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato si appoggia sono l’uno il massimo e l’altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete.* La dimostrazione è immediata se ci si convince prima della seguente affermazione: se per un nodo r di una rete tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ delle tensioni e correnti di tutti i lati che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell’ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo della rete. Infatti dato che $\sum_s I_{rs}=0$ per la LKC, alcune delle I_{rs} - per r fissato - saranno positive ed altre negative. Ciò comporta che, nella ipotesi che tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ siano maggiori di zero - sempre per un fissato r -, anche tra le V_{rs} ve ne saranno alcune positive ed altre negative; ciò equivale a dire che il potenziale del nodo r non è né il minimo né il massimo della rete. Ritornando ora al nostro teorema iniziale si vede chiaramente che nel caso sia presente un solo lato attivo nella rete, i suoi nodi sono gli unici per i quali non si può affermare che $V_{sr}I_{rs} > 0$ per ogni s, perché nel ramo in questione è presente un generatore. Per i nodi interni, a cui fanno capo solo bipoli passivi, questa proprietà è invece certamente verificata. D’altra parte in ogni rete deve pur esserci un nodo a potenziale minimo ed uno a potenziale massimo; se ne conclude che tali potenziali sono assunti dai due nodi dell’unico lato attivo. Qualcuno avrà forse riconosciuto in questa affermazione il riflesso di quella proprietà di cui gode la funzione potenziale di un campo conservativo: essa, infatti, non può avere né massimi né minimi nei punti



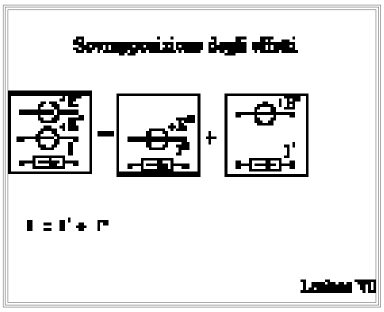


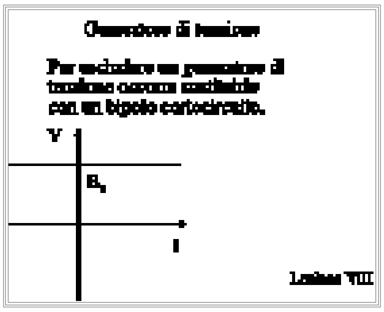
interni del suo dominio di definizione. Massimi e minimi sono assunti sui punti della frontiera.
Lasciamo al lettore l'enunciato e la dimostrazione del teorema duale che prende il nome di *principio di non amplificazione delle correnti.*
Va osservato, però, che i due teoremi di non amplificazione valgono soltanto in regime stazionario; vedremo in seguito dove la dimostrazione illustrata cade in difetto in regime dinamico.



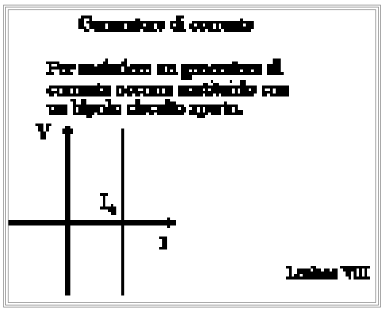
Sovrapposizione degli effetti

Fin qui si è parlato soltanto di proprietà delle reti di bipoli che non dipendono dalla natura dei bipoli stessi, ma solo dal fatto che tali reti sono sottoposte ai dettami della LKC e della LKT. Vogliamo ora invece occuparci di proprietà delle reti di bipoli che dipendono dalla natura dei bipoli stessi. In primo luogo la *sovrapponibilità degli effetti*. È questa una proprietà del tutto generale dei *sistemi lineari*; sistemi, cioè, in cui l'*effetto* è linearmente dipendente dalla *causa*. Essa si può esprimere affermando che una particolare combinazione lineare di cause produce la stessa combinazione lineare degli effetti che ognuna delle cause produrrebbe se si trovasse ad agire da sola. Si potrebbe utilizzare la precedente affermazione quale definizione di sistema lineare, tanto i due fatti sono intimamente legati. In particolare consideriamo una rete con più generatori; se individuiamo nei singoli generatori le cause e nelle correnti e nelle tensioni sui rami gli effetti, siamo portati ad affermare che le correnti o le tensioni sui lati di una rete in cui agiscono più generatori possono essere calcolate come somma delle tensioni e correnti indotte sugli stessi rami dai generatori quando essi agiscono singolarmente. È necessario qualche commento su quest'ultima affermazione: per far sí che un generatore agi-





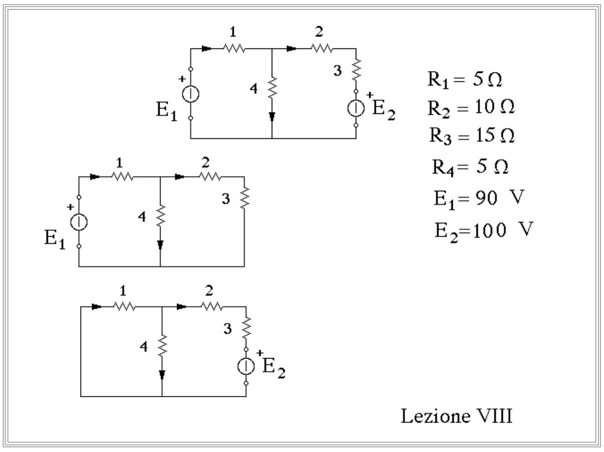
sca da solo occorre evidentemente “eliminare” gli altri. Cosa significhi “eliminare un generatore” dipende evidentemente dal tipo di generatore: un generatore di tensione ideale, per esempio, per sua natura si lascia percorrere da una qualsiasi corrente e produce ai suoi morsetti sempre la stessa tensione. Per eliminare i suoi effetti bisogna ridurre la sua tensione a zero ma non impedire il passaggio della corrente nel ramo occupato dal generatore. Questo, in realtà, equivale a sostituire il bipolo generatore ideale di tensione con un bipolo corto circuito. Un ragionamento del tutto analogo porta alla conclusione che i generatori ideali di corrente, invece, debbono essere sostituiti con dei bipoli a vuoto. Nel linguaggio corrente si parla di *cortocircuitare i generatori di tensione* ed *aprire i generatori di corrente*, il che, preso alla lettera non è corretto; un generatore ideale di tensione, per definizione, non consente che la sua tensione venga annullata da un corto circuito in parallelo. Analogo discorso si può fare per il generatore ideale di corrente. Ciò nonostante l'espressione sintetica è molto comoda e largamente usata; essa va intesa nel senso prima specificato di sostituire i bipoli in questione rispettivamente con bipoli corto circuito ed a vuoto. A questo punto è perfettamente definito ogni aspetto della sovrapposizione degli effetti nelle reti lineari.

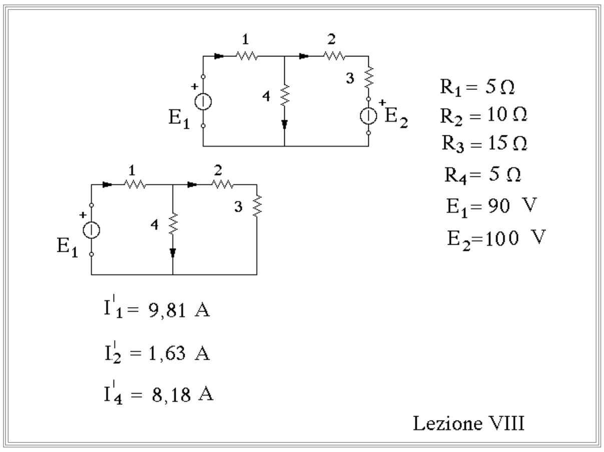


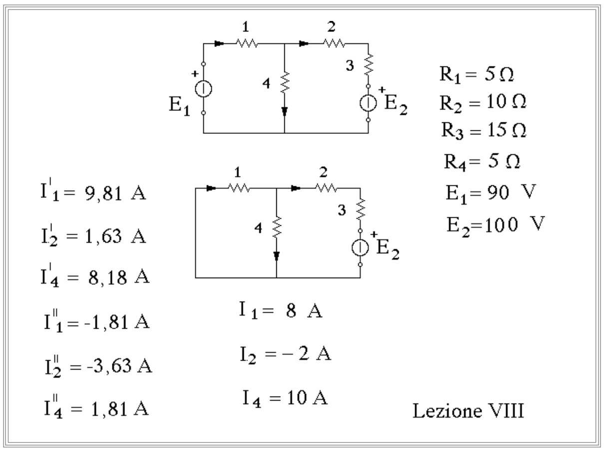
Ancora una osservazione di carattere pratico: quando si applica il principio di sovrapposizione degli effetti bisogna fare attenzione ad utilizzare, in ognuna delle reti elementari in cui si scompone la rete con più generatori, sempre la stessa orientazione per ogni ramo. Altrimenti si rischia di sottrarre quello che andrebbe sommato o viceversa!

Il principio di sovrapposizione degli effetti è di grande utilità sia dal punto di vista pratico che dal punto di vista puramente speculativo. Dal punto di vista pratico esso fornisce, se vogliamo, il più elementare metodo di soluzione di una rete. Il principio ci consente infatti di affermare che la soluzione di una rete comunque complessa, con più generatori, è riconducibile alla soluzione di più reti in ognuna delle quali agisce un solo generatore. Orbene, come abbiamo già sottolineato, una rete con un solo generatore può essere ricondotta ad una rete elementare, di una sola maglia, in cui il generatore in questione è chiuso su di un unico bipolo equivalente. Tale bipolo si identifica attraverso successive riduzioni della rete, mediante sostituzione di rami in serie o di rami in parallelo con il loro bipolo equivalente. Naturalmente, come abbiamo già sottolineato, non sempre queste due trasformazioni sono sufficienti; occorre anche, talvolta, una ulteriore trasformazione che viene detta *stella - poligono* e che studieremo in seguito. In ogni caso quello che più importa è che è sempre possibile ricondurre la rete passiva, vista dai due morsetti dell'unico generatore presente, ad un unico bipolo equivalente. Una volta effettuata questa operazione è facile calcolare la corrente erogata dal generatore, se di tensione, o la tensione che compare ai suoi morsetti, se di corrente; basta applicare la relazione caratteristica del bipolo equivalente trovato. A questo punto si tratta di determinare le correnti nei vari rami effettivi della rete, ripercorrendo a ritroso la strada precedentemente fatta.

Una semplice applicazione renderà subito chiaro il metodo. Nel circuito, mostrato nelle figure, agiscono due generatori di tensione. Nelle stesse figure sono mostrati i due circuiti in cui la rete può essere scomposta cortocircuitando un generatore di tensione alla volta. La determinazione delle correnti nei vari rami, nei due casi, è molto agevole, ed i risultati sono sinteticamente riportati. Le correnti nella rete di partenza si ottengono sommando quelle omologhe delle reti componenti.


$R_1 = 5\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$R_3 = 15\,\Omega$
$R_4 = 5\,\Omega$
$E_1 = 90$ V
$E_2 = 100$ V
Lezione VIII


$R_1 = 5\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$R_3 = 15\,\Omega$
$R_4 = 5\,\Omega$
$E_1 = 90$ V
$E_2 = 100$ V
$I'_1 = 9{,}81$ A
$I'_2 = 1{,}63$ A
$I'_4 = 8{,}18$ A
Lezione VIII


$R_1 = 5\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$R_3 = 15\,\Omega$
$R_4 = 5\,\Omega$
$E_1 = 90$ V
$E_2 = 100$ V
$I'_1 = 9{,}81$ A
$I'_2 = 1{,}63$ A
$I'_4 = 8{,}18$ A
$I''_1 = -1{,}81$ A
$I''_2 = -3{,}63$ A
$I''_4 = 1{,}81$ A
$I_1 = 8$ A
$I_2 = -2$ A
$I_4 = 10$ A
Lezione VIII