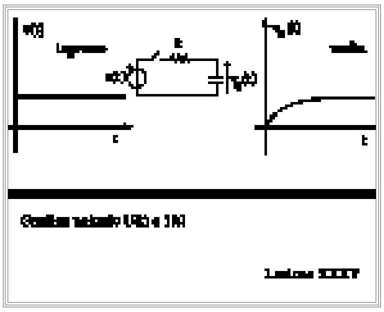
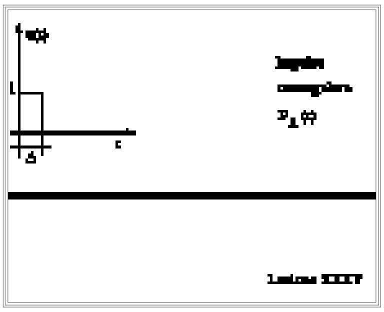
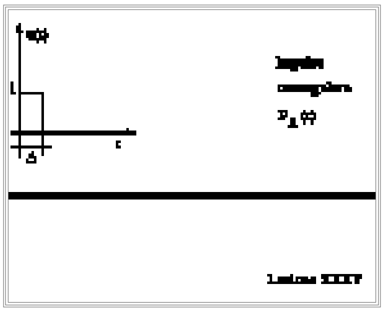
I segnali impulsivi



Un metodo completamente diverso di affrontare il problema della dinamica nei circuiti lineari è quello basato sulla convoluzione di risposte impulsive. Daremo una sintetica introduzione di tale metodo, anche perché esso può facilmente essere generalizzato e trova largo uso nella teoria dei Controlli Automatici.
Consideriamo un circuito molto semplice, e più volte esaminato in precedenza: il circuito di carica di un condensatore.
Il sistema è alimentato da un generatore di tensione in continua di valore unitario applicato, mediante un interruttore, all'istante t = 0. Focalizziamo la nostra attenzione sulla dinamica della tensione ai capi del condensatore, che supponiamo inizialmente scarico. In altre parole possiamo dire che guardiamo al circuito come ad un doppio bipolo che abbia in i*ngresso*, ai morsetti primari, il generatore di tensione ed in *uscita* la tensione ai morsetti del condensatore.



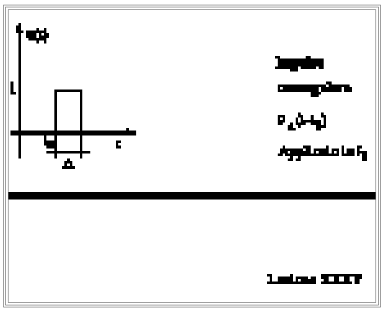
Per inciso, un tale modo di vedere le cose è generalizzabile ad una qualsiasi rete di n nodi ed *l* lati alimentata da un unico generatore ed inizialmente a riposo; basterà scegliere una opportuna uscita che potrà essere la tensione o la corrente interessante uno qualsiasi dei bipoli costituenti la rete stessa. Il nostro interesse è rivolto alla determinazione di una relazione tra il segnale in uscita e quello in ingresso - il generatore che alimenta la rete. Per questo motivo è necessario supporre la rete inizialmente scarica o, come si dice, allo *stato zero*; dobbiamo essere sicuri, infatti, che il segnale in uscita dipenda esclusivamente dal segnale in ingresso e non dalle particolari condizioni iniziali della rete.
Tornando al circuito di carica del condensatore, come sappiamo, l'evoluzione della tensione ai suoi morsetti è data dalla relazione:



$$v_c(t) = 1 - e^{-t/RC} . \qquad \text{(VIII.20)}$$

Dopo un tempo teoricamente infinito il condensatore raggiunge la tensione di un volt, perché tale e la tensione del generatore in ingresso. Un ingresso di tale tipo viene anche detto *gradino unitario* e rappresentato con il simbolo U(t) o 1(t). Si avrà, quindi:

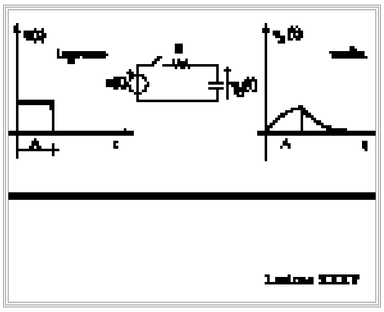
$$\begin{aligned} U(t) &= 0 \qquad \text{per } t < 0 , \\ U(t) &= 1 \qquad \text{per } t > 0 . \end{aligned} \qquad \text{(VIII.21)}$$



Naturalmente potremo avere anche un gradino unitario di corrente, se il generatore è di corrente e non di tensione. Con i simboli $U(t - t_0)$ o $1(t - t_0)$ indicheremo invece un andamento identico al precedente ma traslato nel tempo di un intervallo t_0.
Supponiamo ora che il segnale in ingresso non sia un gradino unitario ma che si annulli improvvisamente dopo un certo intervallo di tempo Δ. Chiameremo un tale segnale impulso rettangolare di ampiezza Δ ed useremo per esso il simbolo $P_\Delta(t)$ o $P_\Delta(t - t_0)$, a seconda dell'istante iniziale. Osserviamo che, utilizzando il simbolismo introdotto per la funzione a gradino possiamo, definire l'impulso rettangolare alla seguente maniera:

$$P_\Delta(t) = U(t) - U(t - t_0) \qquad \text{(VIII.22)}$$

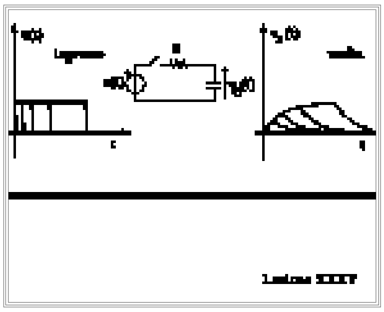
Quando nel circuito di carica del condensatore la tensione del generatore si riduce a zero, il condensatore comincia a scaricarsi attraverso lo stesso circuito - si ricordi che un generatore ideale di tensione che eroga una tensione nulla equivale ad un cortocircuito - con la ben nota legge:



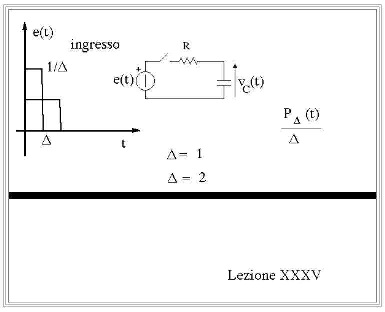
$$v_c(t) = V_{t_0}\, e^{-(t - t_0)/RC} , \qquad \text{(VIII.23)}$$

dove V_{t_0} è la tensione raggiunta all'istante t_0 dal condensatore nella sua carica precedente. L'andamento è quello caratteristico descritto nella figura.

Se ora proviamo a ridurre gradualmente l'ampiezza Δ dell'impulso rettangolare, la risposta del circuito si modifica di conseguenza nella maniera mostrata nella figura successiva, per alcuni valori di Δ. Al limite, per Δ che tende a zero, la risposta tende ad essere identicamente nulla perché il condensatore *non ha il tempo di caricarsi*.



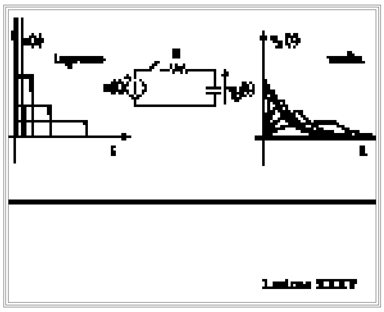
Diversamente vanno le cose se in ingresso poniamo un segnale pari a $P_\Delta(t)/\Delta$. Si tratta di un impulso rettangolare la cui intensità varia in ragione inversa della sua ampiezza temporale, così come mostrato nelle immagini per due valori di Δ.



È interessante notare che:

$$\int_0^t \frac{P_\Delta(\tau)}{\Delta} d\tau = 1 , \qquad \text{(VIII.24)}$$

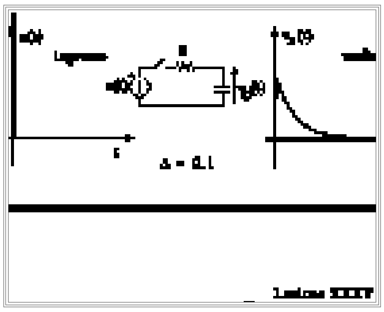
per qualsiasi t > Δ e qualunque sia Δ. L'area sottesa dalla curva che rappresenta l'andamento della funzione integranda è, infatti, sempre unitaria.

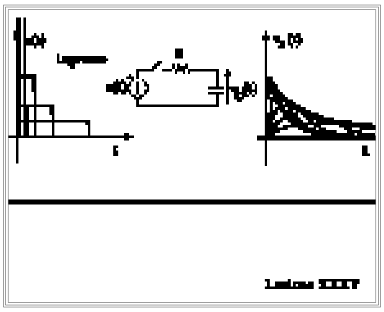


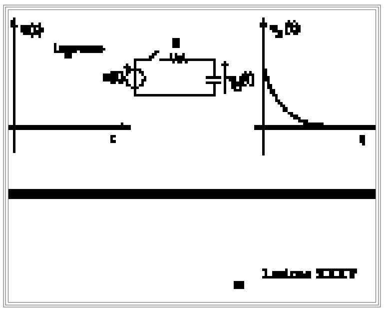
Semplici calcoli mostrano che, al tendere di Δ a zero, la risposta della rete a segnali del tipo $P_\Delta(t)/\Delta$ non si annulla ma tende ad un andamento del tipo:

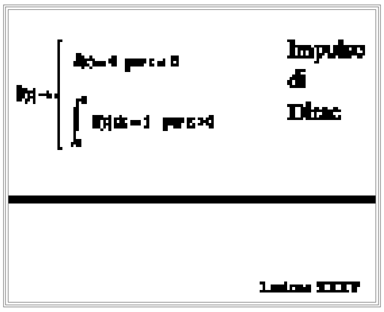
$$v_c(t) = V_0 \, e^{-t/RC} . \qquad \text{(VIII.25)}$$

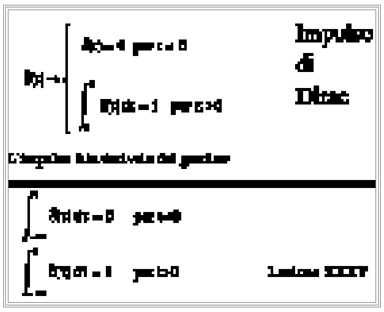
Tutto si svolge quindi come se il condensatore si caricasse istantaneamente ad un particolare valore V_0 per poi successivamente scaricarsi con la solita legge esponenziale. Il valore di V_0 non è immediatamente noto; esso potrebbe essere calcolato, naturalmente, ricavando l'espressione della curva luogo dei vertici dei diversi andamenti di carica/scarica del condensatore per valori di Δ decrescenti, e determinandone la sua intercetta con l'asse delle ordinate. È un utile esercizio che consigliamo; noi arriveremo allo stesso risultato per











altra via analizzando più a fondo la natura del particolare segnale che è stato in grado di caricare istantaneamente il condensatore.

In effetti, facendo tendere Δ a zero, $P_\Delta(t)/\Delta$ tende ad una particolarissima funzione - in effetti essa non è una funzione nel senso classico e per introdurla si dovrebbe far ricorso alla *teoria delle distribuzioni* - che è nulla ovunque eccetto in un intorno arbitrariamente piccolo dello zero, in cui essa tende ad assumere un valore illimitato; una tale funzione prende il nome di impulso di Dirac e per essa si usa il simbolo $\delta(t)$.

In ultima analisi potremmo accettare per l'impulso di Dirac la seguente definizione: $\delta(t)$ vale zero ovunque, eccetto in t=0, dove per altro non è definita, ma è tale che:

$$\int_0^\varepsilon \delta(t)\, dt = 1 \,, \qquad \text{(VIII.26)}$$

qualsiasi sia il valore di ε purché positivo. Infatti di tale proprietà godevano tutte le funzioni $P_\Delta(t)/\Delta$ di cui l'impulso di Dirac è il limite. Naturalmente con il simbolo $\delta(t-t_0)$ indicheremo l'impulso di Dirac applicato nell'istante t_0.

Con il formalismo introdotto possiamo affermare che la (VIII.25) non è altro che la risposta del circuito di carica del condensatore quando in ingresso è presente un impulso di Dirac.

Osserviamo che, in base alla definizione (VIII.22), è possibile ricavare la seguente notevole relazione:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{P_\Delta(t)}{\Delta} \right] = \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{U(t) - U(t-\Delta)}{\Delta} \right] = \frac{dU(t)}{dt} \,. \end{aligned} \qquad \text{(VIII.27)}$$

L'impulso di Dirac, quindi, può essere interpretato anche come la derivata della funzione gradino unitario.

Questa osservazione ci consente di ricavare facilmente la risposta della rete ad una sollecitazione impulsiva. Infatti, a causa della linearità della rete, e della linearità della operazione di derivazione, possiamo affermare che la risposta alla derivata di un ingresso deve coincidere con la derivata della risposta all'ingresso stesso. In particolare, la risposta ad una sollecitazione impulsiva deve coincidere con la derivata della risposta al gradino unitario. Ne consegue che alla (VIII.25) possiamo giungere anche derivando la (VIII.20):

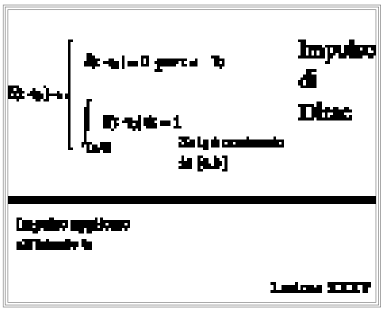
$$v_{c\delta}(t) = V_0\, e^{-t/RC} = \\ = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\ . \qquad \text{(VIII.28)}$$

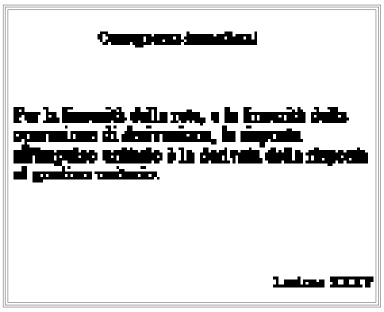
Nel seguito conveniamo di utilizzare il pedice δ per indicare la risposta all'impulso unitario ed il pedice g per indicare la risposta al gradino unitario; così come useremo il simbolo e(t) per indicare il generico ingresso ("e" sta per *entrata*) ed il simbolo u(t) per la risposta o *uscita*.

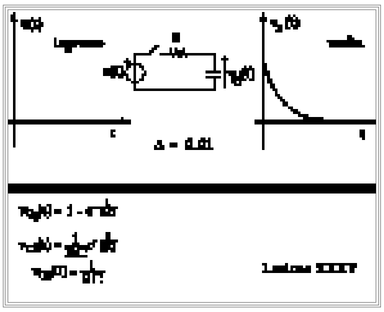
Abbiamo così ricavato, come anticipato, il valore della tensione iniziale cui il generatore impulsivo è riuscito a caricare istantaneamente il condensatore:

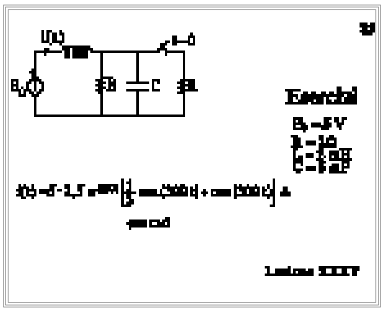
$$V_0 = \frac{1}{RC}\ .$$

Possediamo, dunque, una tecnica del tutto generale per determinare la risposta ad una sollecitazione impulsiva unitaria: basta calcolare la risposta ad una sollecitazione a gradino e successivamente derivarla. La determinazione della risposta al gradino unitario non pone alcun problema, trattandosi, in pratica, della determinazione dell'evoluzione transitoria di una rete alimentata da un unico generatore in continua applicato all'istante t = 0. Una certa attenzione andrà riservata, come vedremo in seguito, all'atto della derivazione di tale risposta, quando essa non è nulla nell'istante iniziale.





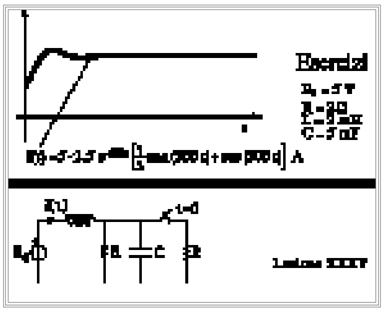




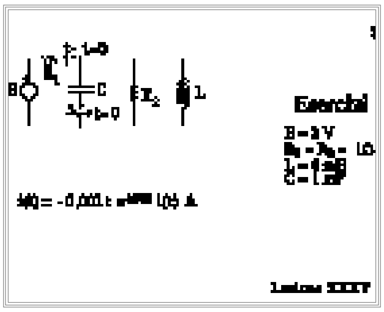
Esercizi

Per l'esercizio riproposto nell'immagine a lato diamo il valore della corrente erogata dal generatore:

$$i(t) = 5 - 2{,}5\ e^{-100\,t} \left[\frac{1}{3}\ \mathrm{sen}\,(300\ t) + \cos\,(300\ t)\right] \mathrm{A}\ .$$

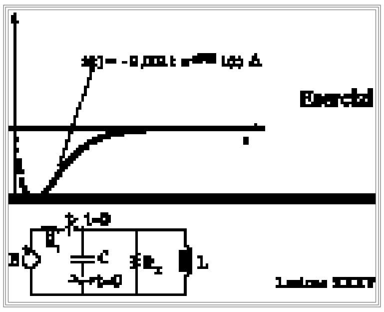


Nell'immagine seguente lo stesso andamento è tracciato in un diagramma.



Per il secondo esercizio diamo il valore della corrente circolante nel resistore R_2:

$$i(t) = -\,2\ t\ e^{-\,t/500}\ 1(t)\ \ \mathrm{mA}\ .$$



Nell'immagine successiva è tracciato il grafico della stessa $i(t)$.